219 - Extremums : existence, caractérisation, recherche. Exemple et applications

Cadre : (X,d) et (Y,δ) sont des espaces métriques. E est un $\mathbb{R}$-evn de dimension finie $n \geq 1$.

Déf. 1 : Soit $f : X \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in X$. On dit que :
1) f admet un minimum local (resp. minimum local strict) en x_0 si il existe V voisinage de x_0 tel que : $\forall x \in V$, $f(x) \leq f(x_0)$ (resp. $\forall x \in V$, $f(x) < f(x_0)$)
2) f admet un minimum global (resp. minimum global strict) en x_0 si : $\forall x \in X$, $f(x) \leq f(x_0)$ (resp. $\forall x \in X$, $f(x) < f(x_0)$).
3) f admet un maximum (...) en x_0 si $-f$ admet un minimum (...) en x_0
4) f admet un extremum en x_0 si elle admet un minimum ou un maximum en x_0

I. Existence et unicité des extremums

1) Compacité

Th. 2 : Si X est compact et $f : X \to Y$ est continue, alors $f(X)$ est compact

Coro 3 : Si X est compact et $f : X \to \mathbb{R}$ est continue, alors f est bornée et atteint ses bornes.

Appli. 4 : Sur $\mathbb{R}^n$, toutes les normes sont équivalentes

[FGN3] Lemme 5 : Soient $A, B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $\alpha, \beta \geq 0$ tels que $\alpha + \beta = 1$.
Alors, $\det(\alpha A + \beta B) \geq (\det A)^{\alpha} (\det B)^{\beta}$.
De plus, si $A \neq B$, alors l'inégalité est stricte.

DVP 1 Th. 6 : (ellipsoïde de John-Loewner)
Soit $K \subset \mathbb{R}^n$ un compact d'intérieur non vide. Alors il existe un unique ellipsoïde contenant K, centré en O et de volume minimal.

[Gia] 175 Déf. 7 : Une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est dite coercive si $f(x) \xrightarrow[\|x\| \to +\infty]{} +\infty$

Th. 8 : Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est coercive, alors f admet (au moins) un point de minimum.

++ Ex. 9 : Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \langle x, b\rangle$

Alors ϕ admet (au moins) un point de minimum. ← rajouter th. spectral

2) Convexité

Déf. 10 : Soit C une partie convexe de E. Une fonction $f : C \to \mathbb{R}$ est dit convexe si : $\forall (x,y) \in C^2$, $\forall \lambda \in [0,1]$, $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$. [Gou] ~ 95
Elle est dite strictement convexe si l'inégalité est stricte pour $\lambda \in]0,1[$.

Rq 11 : Une fonction convexe est continue. 96

Th. 12 : Soit C une partie convexe de E et $f : C \to \mathbb{R}$. [Gia]
1) Si f est convexe et admet un minimum local, alors c'est un minimum global. 156
2) si f est strictement convexe et admet un minimum local, alors c'est un minimum global strict.

Rq 13 : Le Th. 12 ne dit rien sur l'existence d'un minimum. ♡
$x \in \mathbb{R} \mapsto e^x$ est strictement convexe et n'admet pas de minimum (même local).

Ex. 14 : ϕ de Ex. 9 admet un minimum local strict sur $\mathbb{R}^n$. ++

3) Espaces de Hilbert

Cadre 15 : Dans cette partie $(E, \langle,\rangle)$ est un espace de Hilbert (de dimension quelconque). On note $\|\cdot\|$ la norme associée à $\langle,\rangle$. [H-L] 91

Th. 16 : (projection sur un convexe fermé)
Soit C une partie convexe fermée non vide de E. Alors pour tout $x \in E$, il existe un unique $y \in C$ tel que $\|x-y\| = d(x,C) = \inf\{\|x-z\|, z \in C\}$
Ce point, appelé projection de x sur C et noté $p_C(x)$ est caractérisé par :
$y \in E$, $y = p_C(x) \iff y \in C$ et $\forall z \in C$, $Re(\langle x-y, z-y\rangle) \leq 0$

Prop. 17 : Soit F un sev fermé de E. Alors $p_F \in \mathcal{L}_c(E,F)$. Si $x \in E$, alors $p_F(x)$ est l'unique élément $y \in E$ tel que : $y \in F$ et $x - y \in F^{\perp}$ 92

Coro 18 : Si F est un sev de E, alors $E = \bar{F} \oplus F^{\perp}$ 93

Appli. 19 : (moindres carrés) Soient n points (x_i, y_i) de $\mathbb{R}^2$, les x_i non tous égaux. [Rou] 384
Alors il existe un unique $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ rendant minimale $\sum_{i=1}^{n} (\lambda x_i + \mu - y_i)^2$
(voir ANNEXE)

II. Caractérisation des extremums. Différentielle

1) Caractérisation sur un ouvert

Cadre (20) : $U \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert et $f : U \to \mathbb{R}$.

On écrira CN pour condition nécessaire et CS pour condition suffisante.

[Rou] Th. (21) :

1) CN du 1er ordre : si f admet un extremum local en $a \in U$ et f est
371 différentiable en a, alors $df(a) = 0$ (équation d'Euler)

2) CN du 2nd ordre : si f admet un minimum local en $a \in U$ et f est deux fois différentiable en $a \in U$, alors $\mathrm{Hess}_a f \in \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$.

3) CS du 2nd ordre : soit $a \in U$ tel que f soit deux fois différentiable en a, $df(a) = 0$ et $\mathrm{Hess}_a f \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Alors, f admet en a un minimum local strict.

Rq (22) : 1) U ouvert est indispensable : $f(x) = x$ admet sur $[0,1]$ un minimum
371 global en 0, mais $f'(0) = 1$

2) $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^3$ montre que les CN 1) et 2) ne sont pas des CS

3) $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^4$ ——— la CS 3) n'est pas une CN.

Appli. (23) : Soit $a \in U$ tel que f soit deux fois différentiable en a, $df(a) = 0$
378 et $H = \mathrm{Hess}_a f = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$ ($n = 2$, notations de Monge).

1) si $rt - s^2 > 0$ et $r > 0$ (resp. $r < 0$), alors f admet en a un minimum (resp. maximum) local strict.

2) si $rt - s^2 < 0$, alors a est un point selle

3) si $rt - s^2 = 0$, alors H est dégénérée et on ne peut a priori rien dire.

379 Exo. (24) : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2 - y^2 + \frac{1}{4} y^4$. Déterminer les extremums (s'ils existent) de f.

Exo (25) : (moindres carrés bis)

384 Retrouver le résultat de Appli. (19) en considérant $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(\lambda, \mu) \mapsto \sum_{i=1}^{n} (\lambda x_i + \mu - y_i)^2$

2) Convexité

Cadre (26) : $U \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert, $C \subset U$ est une partie convexe [Gio]
et $f : U \to \mathbb{R}$.

Th. (27) :

1) CS du 1er ordre : si f admet un minimum local en $a \in C$ et f est 153
différentiable en a, alors : $df(a)(x-a) = \langle \nabla f(a), x - a \rangle \geq 0 \quad \forall x \in C$

(inéquations d'Euler)

2) CNS du 1er ordre : si f est convexe sur C et f est différentiable en
$a \in C$, alors f admet un minimum en a SSI $df(a)(x-a) \geq 0 \quad \forall x \in C$ 156

3) si C est ouvert, alors la CNS 2) équivaut à $df(a) = 0$.

Ex. (28) : L'unique point de minimum $\bar{x}$ de Φ de Appli. (15) est tel que $d\Phi(\bar{x})(h) = \langle A\bar{x} - b, h \rangle = 0 \quad \forall h \in \mathbb{R}^n$ soit $A\bar{x} = b$.

III. Optimisation

1) Méthode du gradient optimal

Rappel (29) : $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, la solution de $A\bar{x} = b$ est [Ber]
l'unique point de minimum de $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \langle b, x \rangle$.

On notera : $\langle x, y \rangle_A = \langle Ax, y \rangle$, $\|x\|_A = \sqrt{\langle x, x\rangle_A}$ et $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$ 159 +

Lemme (30) : (Kantorovich)

Soient $\lambda_{min} = \lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_n = \lambda_{max}$ les valeurs propres de A et
$x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Alors : $\dfrac{\|x\|^4}{\|x\|_A^2 \, \|x\|_{A^{-1}}^2} \geq 4 \times \dfrac{\lambda_{max} \lambda_{min}}{(\lambda_{max} + \lambda_{min})^2}$ DVP 2

DVP2

Th. 31 : (algorithme du gradient optimal)

Soit $a \in \mathbb{R}^n$. On définit une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} x_0 = a \\ \alpha_k = \dfrac{\|\nabla\phi(x_k)\|^2}{\|\nabla\phi(x_k)\|_A^2} \text{ si } x_k \neq \bar{x}, \ 0 \text{ sinon} \\ x_{k+1} = x_k - \alpha_k \nabla\phi(x_k) \end{cases}$$

Alors, $x_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} \bar{x}$

Ex 32 : On peut appliquer l'algorithme du gradient optimal à

$$L = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \text{ matrice du Laplacien 1D.}$$

2) Optimisation sous contrainte

[Rou] Déf. 33 : Soit Π une partie de $\mathbb{R}^n$. On dit que Π est une sous-variété

200 de $\mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$ et de dimension $d \leq n$ si pour tout $a \in \Pi$, il existe U voisinage ouvert de a dans $\mathbb{R}^n$, $g : U \to \mathbb{R}^{n-d}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $dg(a)$ soit surjective et $\Pi \cap U = \{x \in U \,/\, g(x) = 0\}$.

Prop. 34 : Si on note $T_a\Pi$ l'espace tangent en $a \in \Pi$, alors

201 $T_a\Pi = \operatorname{Ker} dg(a)$.

Lemme 35 : Soit f une fonction définie dans un voisinage ouvert de Π.

373 Si $f_{|\Pi}$ admet un extremum local en $a \in \Pi$, alors $T_a\Pi \subset \operatorname{Ker} df(a)$.

Th. 36 : (extrema liés)

Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, $f, g_1 \dots g_p : U \to \mathbb{R}$ des applications de classe $\mathcal{C}^1$ et $\Sigma = \{x \in U \,/\, g_1(x) = \dots = g_p(x) = 0\}$. Si $f_{|\Sigma}$ admet en $a \in \Sigma$ un

372 extremum local, et $dg_1(a), \dots dg_p(a)$ sont linéairement indépendantes, alors il existe $\lambda_1 \dots \lambda_p \in \mathbb{R}$ appelés multiplicateurs de Lagrange tels que $df(a) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \, dg_i(a)$.

Appli. 37 : (inégalité de Hadamard)

Soit $f : \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $(v_1 \dots v_n) \mapsto \det(v_1 \dots v_n)$ et $X = \{(v_1 \dots v_n) \in (\mathbb{R}^n)^n \,/\, \|v_1\| = \dots = \|v_n\| = 1\}$ où $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$. 409

1) Mq si $f_{|X}$ atteint son maximum en $(v_1 \dots v_n)$, alors $(v_1 \dots v_n)$ forme une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$

2) En déduire que : $\forall (v_1 \dots v_n) \in (\mathbb{R}^n)^n$, $|\det(v_1 \dots v_n)| \leq \|v_1\| \dots \|v_n\|$

Appli. 38 : (théorème spectral) [AJ]

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ un endomorphisme autoadjoint. Alors, il existe une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ de vecteurs propres de u. 103 104

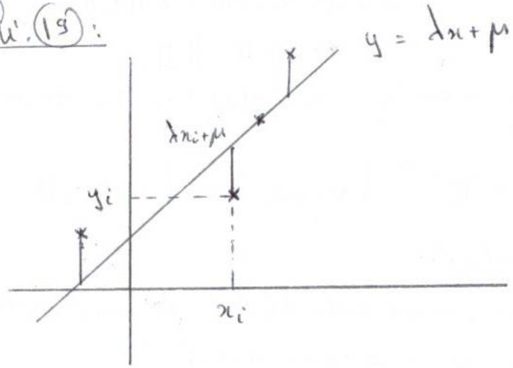
Rq 39 : Une démonstration plus "classique" du théorème spectral [Gou2]

utilise les résultats sur la compacité du I.1). 244

Exo 40 : On considère $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$. Soit q une forme quadratique, [Rou] définie positive sur $\mathbb{R}^n$. Étudier les extremums de $f : x \mapsto \|x\|^2$ sur $\{x \in \mathbb{R}^n \,/\, q(x) = 1\}$. 403

ANNEXE

Appli. (15) :



droite des moindres carrés

Exo. (40) :

dessin [Rou] 409

Références :

- [FGN3] Francinou, Oraux X-ENS Algèbre 3
- [Cia] Ciarlet, Introduction...
- [Gou] Gourdon, Analyse (3e éd.)
- [Gou2] Gourdon, Algèbre (2e éd.)
- [HL] Hirsch-Lacombe, Eléments d'analyse fonctionnelle
- [Rou] Rouvière, PGdCD